k désigne un entier strictement positif. On note u_k et v_k les fonctions de variable réelle définies par :

$$u_k(t) = \frac{t^k}{e^t + 1} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

et

$$v_k(t) = \frac{t^k}{e^t - 1} \quad \text{pour } t \neq 0,\ v_k(0) = \lim_{t \to 0} v_k(t)$$

On note

$$I_k = \int_0^{+\infty} u_k(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad J_k = \int_0^{+\infty} v_k(t)\,dt$$

I

1° Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$ converge. La calculer.

2° *a.* En déduire que l'intégrale définissant I_k converge (on ne cherchera pas à la calculer).

b. Pour quelles valeurs de t a-t-on $e^t - 1 \geqslant e^{t/2}$? En déduire la convergence de l'intégrale J_k.

3° Montrer la relation $I_k = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) J_k$.

4° Montrer l'égalité

$$\int_0^{+\infty} (1 - e^{-Nt})\, v_k(t)\,dt = k! \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{k+1}}$$

quel que soit N entier strictement positif.

5° En déduire J_k comme la somme d'une série, en justifiant soigneusement le passage à la limite. (On pourra par exemple majorer $\frac{t}{e^t - 1}$.)

6° En déduire I_k comme la somme d'une série.

II

On considère les fonctions définies par

$$f(u) = \int_0^u u_2(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad g(u) = \int_0^u v_2(t)\,dt$$

où u désigne un nombre réel.

On ne cherchera pas à calculer explicitement $f(u)$ ni $g(u)$.

On considère la courbe (C) définie paramétriquement dans un repère orthonormé Oxy par $\begin{cases} x = f(u) \\ y = g(u) \end{cases}$.

1° Quelle est la forme de (C) au voisinage de l'origine?

2° *a.* Calculer la limite de $y + x$ quand u tend vers $-\infty$ en fonction de I_2 et J_2. En déduire que (C) admet une asymptote, dont on donnera l'équation en fonction de I_2.

b. Quelle est la position de la courbe par rapport à son asymptote?

3° Étudier la concavité de (C). (On pourra utiliser g'/f'.)

4° Construire (C) en prenant $I_2 = 5$ cm. On placera le point asymptote A par rapport à l'asymptote.

5° Soit $\vec{v}$ le vecteur de composantes (cos 0, sin 0). Pour quelles valeurs de 0 existe-t-il une tangente à (C) perpendiculaire à $\vec{v}$? Calculer le paramètre du point de tangence en fonction de 0.

III

Rappel : Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit une loi *uniforme* sur un intervalle, si sa densité est constante sur cet intervalle et nulle en dehors.

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites du plan, qu'on écrit sous la forme

(1) $\qquad x \cos 0 + y \sin 0 = p \qquad p \geqslant 0 \qquad 0 \in [-\pi, \pi[$.

$\mathcal{D}$ est probabilisé de façon à ce que les applications Θ et P, qui à toute droite D de $\mathcal{D}$ font correspondre $\Theta(D) = \theta$ et $P(D) = p$, soient des variables aléatoires indépendantes, Θ suivant une loi uniforme sur $[-\pi, \pi[$ et P une loi uniforme sur $[0, \sqrt{I_2^2 + J_2^2}]$.

On pose $\varphi = \text{Arc tg}\,(J_2/I_2)$ et on admet qu'une droite coupe (C) si, et seulement si elle coupe OA ou si

$$0 \in \left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \pi\right[.$$

1° Quel est l'ensemble des couples $(0, p)$ pour lesquels la droite d'équation (1) coupe (C)?

Représenter graphiquement l'ensemble de ces couples.

2° Quelle est la probabilité pour qu'une droite coupe (C)?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail